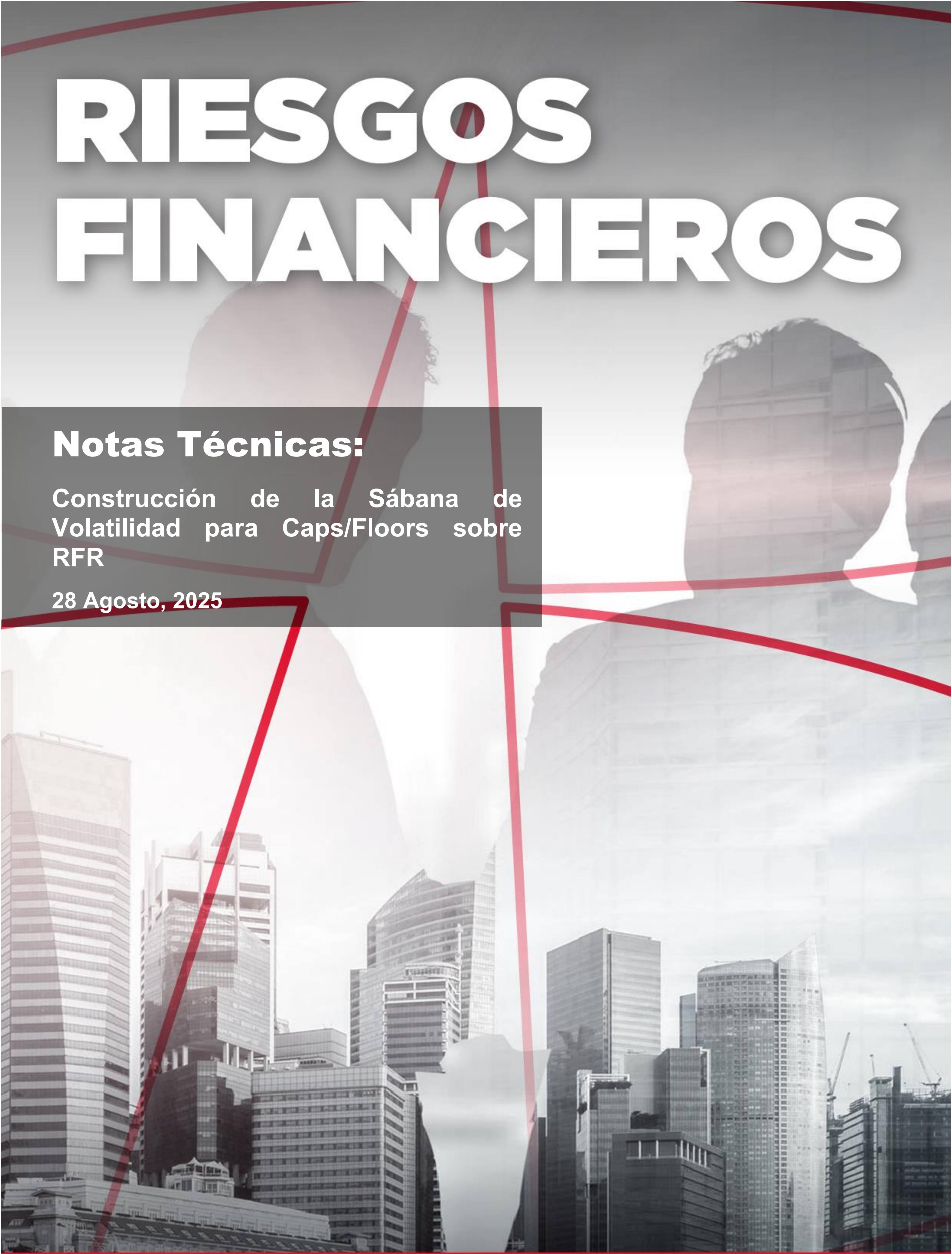


RIESGOS FINANCIEROS

Notas Técnicas:

Construcción de la Sábana de Volatilidad para Caps/Floors sobre RFR

28 Agosto, 2025

RIESGOS FINANCIEROS

NOTAS TÉCNICAS

Construcción de la Sábana de Volatilidad para Caps/Floors sobre RFR

INTRODUCCIÓN

La presente nota técnica tiene como objetivo mostrar la metodología técnica para la construcción de la sábana de volatilidad de instrumentos *caps* y *floors* referenciados a tasas libres de riesgo (*RFR*) mediante la implementación de un modelo de Bachelier ajustado.

La evolución de los mercados financieros globales, impulsada por los estándares regulatorios internacionales, ha llevado a una transición definitiva en el uso de tasas de referencia. En este contexto, los instrumentos derivados de tasa de interés han experimentado un cambio estructural, particularmente en lo que respecta al tratamiento de la volatilidad implícita y la construcción de la sábana de volatilidad.

Una sábana de volatilidad es la representación estructurada de las volatilidades implícitas observadas en el mercado, organizadas por un *tenor* y un *strike*. Su adecuada construcción es indispensable para la valuación, calibración de modelos, métricas de riesgos, cálculo de sensibilidades y gestión del riesgo de derivados.

Históricamente, los modelos de volatilidad fueron diseñados para tasas *forward* conocidas desde el inicio del periodo (tipo LIBOR) Sin embargo, la transición hacia tasas libres de riesgo compuestas (*RFRs*), como la SOFR en Estados Unidos, €STR en la Zona Euro o la TIIE de Fondeo en México, ha modificado las propiedades estadísticas de los subyacentes. Estos cambios han generado la necesidad de adaptar los modelos clásicos para capturar adecuadamente la dinámica de tasas que se determinan mediante acumulación diaria. En particular, los *caps/floors* sobre tasas compuestas RFR requieren una metodología diferente de valoración, pues el *fixing* del *caplet/floorlet* corriente se conoce al final del periodo.

MODELO AJUSTADO DE BACHELIER PARA CAPS/FLOORS SOBRE RFR

El modelo clásico de Louis Bachelier fue originalmente desarrollado para opciones sobre tasas forward (IBOR) con volatilidad normal. Sin embargo, el modelo de Bachelier tenía limitaciones, especialmente en el contexto de opciones sobre tasas de interés, ya que asumía que los precios podían ser negativos (lo que no es el caso para los activos financieros tradicionales).

Por lo anterior, el modelo se adaptó para reflejar correctamente las características de las nuevas tasas (*RFR*), que son *backward-looking* y solo se conocen al final del periodo de acumulación. En este contexto, se propone un modelo ajustado de Bachelier que incorpora:

- Una fórmula de acumulación compuesta
- Una función de decaimiento de la difusión
- Una versión extendida del modelo clásico

Cálculo de la tasa compuesta *RFR*

La tasa compuesta *RFR* del periodo t_s a t_n se calcula como:

$$R(t_0, t_n) = \frac{1}{\tau}\left[\prod_{i=0}^{n-1}\left(1 + \tau_i \cdot f(t_i, t_{i+1})\right) - 1\right].$$

Dinámica de la tasa *RFR* compuesta (difusión)

Para modelar el comportamiento estocástico de la tasa *RFR* compuesta, se utiliza un proceso de difusión normal con una función de decaimiento lineal para reflejar que la volatilidad disminuye conforme se realicen los *fixings* de las tasas diarias:

$$dR(t) = \sigma \cdot g(t) \cdot dW_t.$$

Donde:

- σ: volatilidad normal del proceso
- $g(t)$: función de decaimiento definida como:

$$g(t) = \min\left(\frac{(T - t)_+}{T - t_{inicio}}, 1\right)$$

- dW_t: movimiento browniano estándar

El modelo clásico de Bachelier asume que la tasa sigue una difusión normal acorde a $dF = \sigma_N dW_t$ donde σ_N es la volatilidad normal constante. Para extender el modelo clásico de Bachelier e incluir el efecto del decaimiento en la difusión de tasas *RFR*, se proponen las siguientes fórmulas para valuar *caplets* y *floorlets* sobre tasas *RFR* compuestas, en este enfoque se utiliza una medida ajustada de volatilidad, que considera la función de decaimiento y se refleja en el parámetro Σ_{RFR}

La fórmula ajustada es similar a la del modelo clásico, pero se sustituye la volatilidad constante σ_N por Σ_{RFR}:

$$\text{Bachelier}_{\text{Caplet}}(F, K, \Sigma_{RFR}, T) = DF_{0,T} \cdot N \cdot \tau \cdot \Sigma_{RFR} \cdot \sqrt{T} \cdot \left(d \cdot N(d) + N'(d)\right),$$
$$\text{Bachelier}_{\text{Floorlet}}(F, K, \Sigma_{RFR}, T) = DF_{0,T} \cdot N \cdot \tau \cdot \Sigma_{RFR} \cdot \sqrt{T} \cdot \left(N'(-d) - d \cdot N(-d)\right)$$

La elección de fórmula de valuación utilizada un cap/floor dependerá del tipo de cotización de volatilidad del mercado, σ_N o Σ_{RFR}.

Notación:

- f: Tasa ON
- τ: fracción de número de días para la tasa compuesta R
- τ_i: fracción de número de días entre t_i y t_{i+1}
- $t_{inicio} = t_0$: fecha de inicio del período de capitalización del caplet
- $T = t_n$: fecha de fin del período de capitalización del caplet
- t: hoy
- La tasa acumulada $R(T)$ sigue una distribución normal con media igual al valor inicial $R(0)$ y varianza dada por $\Sigma_{RFR}^2(T) \cdot T = \sigma^2 \cdot \int_0^T g(t)^2 dt$
- $d = \frac{F-K}{\Sigma_{RFR} \cdot \sqrt{T}}$
- $\Sigma_{RFR} = \sqrt{\frac{\sigma^2 \cdot \int_0^T g(t)^2 dt}{T}}$
- N: Nocional del *caplet* o *floorlet*
- K: *Strike* del *caplet* o *floorlet*
- $DF_{t,T}$: El factor de descuento entre t y T
- $N(d)$: función de distribución normal estándar
- $N'(d)$: función de densidad normal estándar

CALIBRACIÓN DE VOLATILIDADES MEDIANTE BOOTSTRAPPING

Una vez definido el modelo para valuar *caps* y *floors* sobre tasas *RFR*, es necesario contar con las volatilidades que alimentarán el modelo.

En la práctica profesional, el mercado cotiza volatilidades implícitas para cada vencimiento y *strike*, para posteriormente, transformarlas en volatilidades *forward* por periodo (las cuales son usadas en la valuación de *caplets* y *floorlets*) se utiliza un proceso de calibración llamado *bootstrapping*.

Este procedimiento permite obtener, de manera secuencial, las volatilidades *forward* que hacen consistente el precio teórico del instrumento con su precio de mercado.

Valuación con volatilidad par o de mercado: El valor del cap es la suma del valor de los *caplets* valuados con la misma volatilidad, es decir:

$$\mathrm{Cap_k}(\boldsymbol{\sigma_K}) = \sum_{j=1}^{n_k} \mathrm{Caplet}_{j-1,j}(\boldsymbol{\sigma_K}).$$

Valuación con volatilidades individuales para cada *caplet*: El valor del cap es la suma del valor de los *caplets* valuados con distintas volatilidades llamadas *forward*, esto es:

$$\mathrm{Cap_k}(\boldsymbol{\sigma_K}) = \sum_{j=1}^{n_k} \mathrm{Caplet}_{j-1,j}(\boldsymbol{\sigma_{j-1,j}}).$$

Por consistencia ambas valuaciones deben coincidir, es decir, se buscan volatilidades *forward* $\boldsymbol{\sigma_{j-1,j}}$ tales que ambos precios coincidan, es decir:

$$\sum_{j=1}^{n_k} \mathrm{Caplet}_{j-1,j}(\boldsymbol{\sigma_K}) = \sum_{j=1}^{n_k} \mathrm{Caplet}_{j-1,j}(\boldsymbol{\sigma_{j-1,j}}).$$

Donde:

- $\mathrm{Cap_k}$: cap késimo
- σ_K: volatilidad par para el késimo cap
- $\mathrm{Caplet}_{j-1,j}$: *payoff* del caplet del periodo $[i-1, \mathrm{i}]$
- $\sigma_{j-1,j}$: volatilidad *forward* del caplet del periodo $[T_{j-1}, T_j]$
- n_k: número de *caplets* que conforman el cap

Supóngase que la volatilidad constante de la difusión de Bachelier es σ antes del primer pilar y que la primera volatilidad de *caplet* cotizada es σ_{RFR} y su primera y última fecha de *fixing* son $t_{inicio,0} > 0$ y $t_{fin,0}$ respectivamente.

$$\sigma_{RFR}^2 \cdot t_{fin,0} = \sigma^2 \cdot \left(t_{inicio,0} + \frac{1}{3}\frac{\left(t_{fin,0} - t_{inicio,0}\right)^3}{\tau^2} \right)$$

es decir,

$$\sigma = \sigma_{RFR} \cdot \sqrt{\frac{t_{fin,0}}{t_{inicio,0} + \frac{1}{3}\frac{\left(t_{fin,0} - t_{inicio,0}\right)^3}{\tau^2}}}.$$

Renombrando

$t_{inicio}^{+} = \max(t_{inicio}, 0)$ y $g\left(t_{inicio}, t_{fin}\right) = t_{inicio}^{+} + \frac{1}{3}\frac{\left(t_{fin,0} - t_{inicio,0}\right)^3}{\tau^2}$, se tiene que cuando $T < t_{fin,0}$:

$$\Sigma_{RFR}(T) = \sigma_{RFR} \cdot \sqrt{\frac{t_{fin,0}}{T} \cdot \frac{g(t_{inicio}, T)}{g\left(t_{fin,0}, t_{inicio,0}\right)}}.$$

Por lo tanto, se busca resolver la volatilidad del último *caplet* σ_{RFR} de modo que se igualen las primas de los caps correspondientes basadas en la volatilidad par de mercado *RFR*. Luego, se puede calcular la volatilidad de *pricing* $\Sigma_{RFR}(T)$.

EJEMPLO PARA UN CAP DE 100,000,000 USD, PLAZO DE 1Y, STRIKE DE 4%, PAGOS TRIMESTRALES Y VOLATILIDAD DE MERCADO DE 0.55%

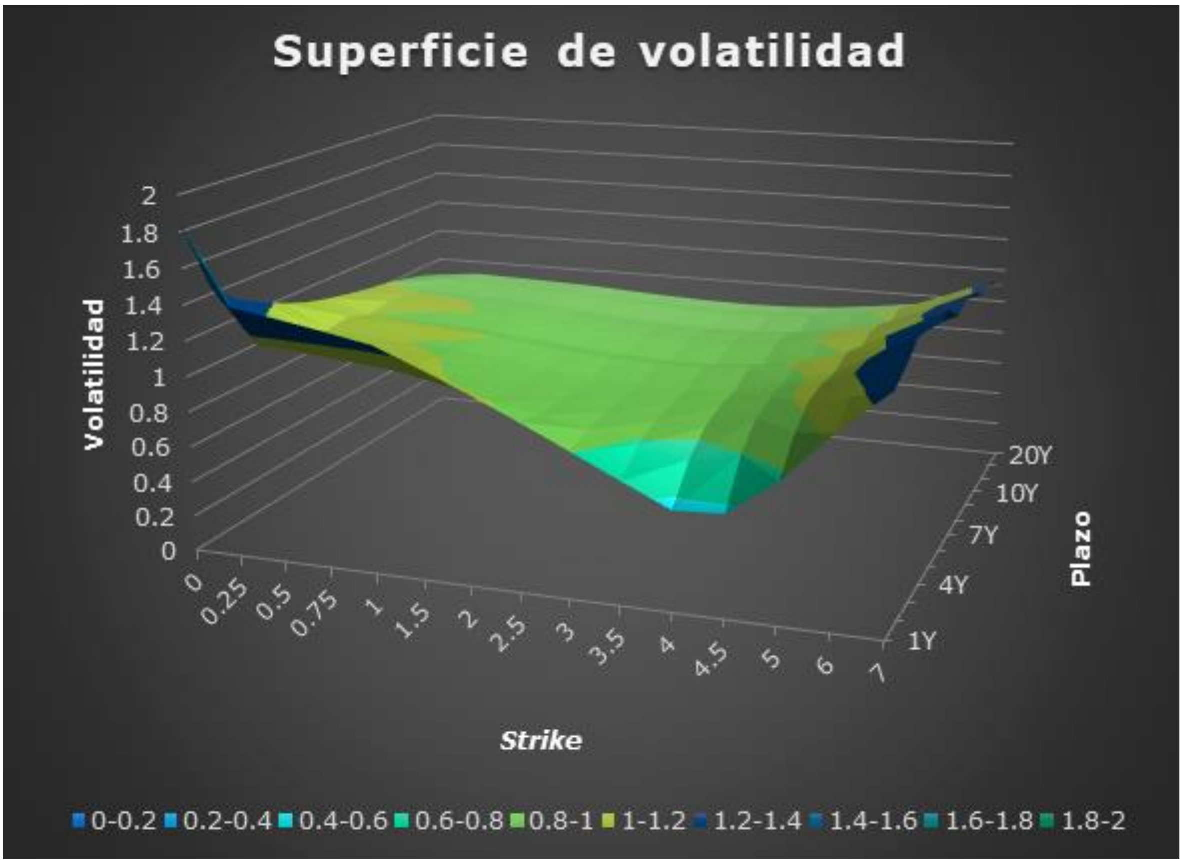
1. Se valúa el cap utilizando para cada *caplet* la misma volatilidad de mercado de 0.55%

Inicio *caplet*	Fin *caplet*	Primer fecha de *fixing*	Última fecha de *fixing*	Volatilidad Par	Tasa	*Strike*	T	d	N(d)	N'(d)	Cupón	Factor de descuento	Valor presente
28-ago-25	28-nov-25	28-ago-25	26-nov-25		4.20%		0.2521	0.7325	0.7681	0.3051	61,451.47	0.9889	60,771.69
28-nov-25	27-feb-26	28-nov-25	26-feb-26	0.55%	3.86%	4.00%	0.5041	-0.3524	0.3623	0.3749	24,495.65	0.9794	23,991.42
27-feb-26	28-may-26	27-feb-26	27-may-26		3.61%		0.7507	-0.8164	0.2071	0.2859	13,962.09	0.9707	13,552.62
28-may-26	28-ago-26	28-may-26	27-ago-26		3.36%		1.0027	-1.1653	0.1219	0.2023	8,505.04	0.9624	8,185.65
													106,501.38

2. Se busca el valor de la última volatilidad forward σ_{RFR}, calculando las volatilidades de los caplets intermedios con la fórmula de $\Sigma_{RFR}(T)$ de tal manera que el valor del Cap sea igual al del paso 1.

T	d	N(d)	N'(d)	Cupón	Factor de descuento	t_{inicio}	T / t_{fin}	τ	g(t_{inicio},t_{fin})	g($t_{inicio,0}$,$t_{fin,0}$)	Volatilidad *forward*	Valor presente
0.2521	1.0243	0.8471	0.2361	55,906.13	0.988938	0.0055	0.2521	0.2466	0.0877	0.8365	**0.39%**	55,287.70
0.5041	-0.3540	0.3617	0.3747	24,326.37	0.979416	0.2575	0.5041	0.2466	0.3397	0.8365	**0.55%**	23,825.62
0.7507	-0.7606	0.2234	0.2987	16,525.44	0.970673	0.5068	0.7507	0.2438	0.5881	0.8365	**0.59%**	16,040.79
1.0027	-1.0522	0.1464	0.2294	11,790.03	0.962446	0.7534	1.0027	0.2493	0.8365	0.8365	**0.61%**	11,347.27
												106,501.38

EJEMPLO DE SÁBANA DE VOLATILIDAD DE SOFR PARA EL 26 DE AGOSTO DE 2025



BANORTE

SUPUESTOS TÉCNICOS

- Se asume la existencia de una medida de riesgo neutral.
- Se considera un mercado financiero en tiempo continuo.
- Existe una tasa libre de riesgo instantánea que se usa como tasa de colateral para descontar flujos.
- Las tasas *forward* siguen un proceso browniano con distribución normal.
- La volatilidad se asume constante en cada pilar (*tenor–strike*).
- El modelo permite valores negativos de tasas, a diferencia del modelo de Black-Scholes.
- La curva *forward* y de descuento se construyen con metodologías *Overnight Indexed Swap* (OIS).

BENEFICIOS Y CONTRIBUCIONES

1. Valuación precisa y consistente
2. Gestión de riesgos más robusta
3. Coberturas más eficientes
4. Detección de oportunidades de *trading*
5. Transparencia y credibilidad
6. Cumplimiento regulatorio y de gobernanza
7. Planeación estratégica y *stress testing*

RIESGOS Y LIMITANTES

Se requiere el uso de software avanzado para realizar el cálculo del modelo y su visualización para la sábana de volatilidad. A su vez, se debe contar con información de mercado actualizada y confiable, ya que sin esta se puede incurrir en incidencias de datos y comprometer la calidad de los resultados. La calibración de volatilidades se basa en precios de mercado; para *strikes* o plazos no líquidos se usan interpolaciones o extrapolaciones.

NOTAS Y REFERENCIAS

1. Bloomberg L.P. Quantitative Analytics. (2021, November 2). Volatility cube for compounded overnight risk-free rates.
2. Lyashenko, A., & Mercurio, F. (2019). Looking forward to backward-looking rates: A modeling framework for term rates replacing LIBOR. Available at SSRN 3330240.