RIESGOS FINANCIEROS

Notas Técnicas:

Ajuste de convexidad en instrumentos CMS (Constant Maturity Swaps)

Noviembre 20, 2025

BANORTE

RIESGOS FINANCIEROS

NOTAS TÉCNICAS

Ajuste de convexidad en instrumentos CMS (*Constant Maturity Swaps*)

OBJETIVO GENERAL

La presente nota técnica tiene como objetivo definir qué es el ***Constant Maturity Swap*** (CMS) y presentar la metodología para calcular su tasa CMS bajo el modelo estocástico de tasas de interés ***Terminal Swap Rate*** (TSR), destacando la necesidad de aplicar un ajuste de convexidad para obtener estimaciones consistentes con los precios observados en mercado, asegurando una valuación libre de arbitraje.

INTRODUCCIÓN

Los instrumentos CMS se utilizan especialmente en contextos donde se busca exposición a la pendiente de la curva de tasas. A diferencia de los swaps tradicionales, donde la tasa flotante está ligada a un índice, como TIIEF o SOFR, en los CMS dicha tasa flotante se determina con base en la tasa swap asociada a un nodo específico de la curva, lo que introduce una sensibilidad a los movimientos en la Estructura Temporal de Tasas de Interés (ETTI) la cual es fundamental en finanzas cuantitativas ya que describe cómo las tasas de interés varían en función del tiempo hasta el vencimiento de un producto financiero.

Desde el punto de vista de valuación, el principal reto técnico radica en que la tasa CMS no corresponde a un activo negociable y, por tanto, no es directamente observable mediante instrumentos lineales. No obstante, la estimación directa de la tasa *swap* terminal bajo medida de riesgo neutral resulta insuficiente para capturar correctamente el valor de la tasa CMS, debido a la convexidad del instrumento, es decir, su sensibilidad no lineal frente a los movimientos de las tasas subyacentes.

Por ello, es necesario incorporar un ajuste de convexidad, el cual corrige esta discrepancia al capturar el impacto de la volatilidad sobre la distribución de la tasa *swap* terminal, permitiendo así una valuación precisa y libre de arbitraje del instrumento. En este contexto, el modelo TSR proporciona un marco estocástico adecuado para modelar la dinámica de la tasa *swap* terminal, permitiendo capturar su comportamiento bajo escenarios de mercado consistentes.

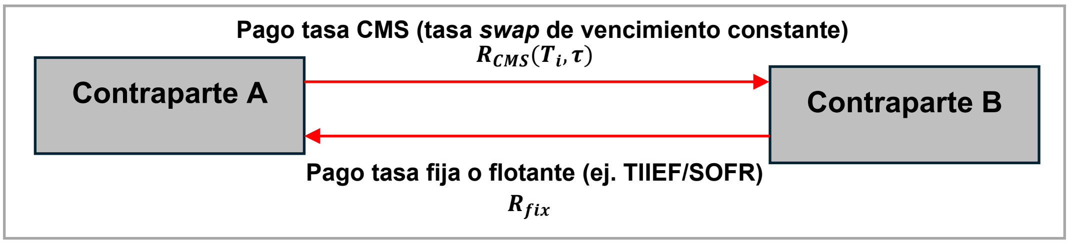
En un entorno de alta volatilidad de tasas y empinamiento inverso de curvas, la correcta valoración de instrumentos CMS adquiere relevancia para las áreas de ALM (*Asset Liability Management*) y tesorería, dado que pequeñas desviaciones en el ajuste de convexidad pueden traducirse en errores de valoración significativos.

¿QUÉ ES UN CONSTANT MATURITY SWAP?

Constant Maturity Swap (CMS) es un contrato derivado de tasa de interés en el cual una de las partes paga una tasa fija o flotante, mientras que la contraparte paga una tasa *swap* de vencimiento constante, denominada tasa CMS. Esta tasa se determina en cada fecha de fijación como la tasa swap vigente para un plazo específico (por ejemplo, para MXN: 3x1, 52x1, 65x1, etc.)

Formalmente, un instrumento CMS puede representarse como una serie de intercambios de flujos de pago en fechas $T_1, T_2, \dots, T_n$, donde en cada fecha T_i se liquida el diferencial entre una tasa fija R_{fix}, o una tasa flotante (por ejemplo, TIIEF o SOFR) y la tasa *swap* de vencimiento constante $R_{CMS}(T_i, \tau)$, correspondiente a un *swap* que inicia en T_i y tiene vencimiento en $T_i + \tau$, siendo τ el nodo que representa el vencimiento del *swap* en la curva.

Figura 1. Estructura de flujos de pago en un CMS (*Constant Maturity Swap*)



Una vez definida la estructura de flujos del CMS, es posible expresar el valor presente de la pata flotante como la suma de los flujos descontados bajo la medida de riesgo neutral, tal como se muestra a continuación:

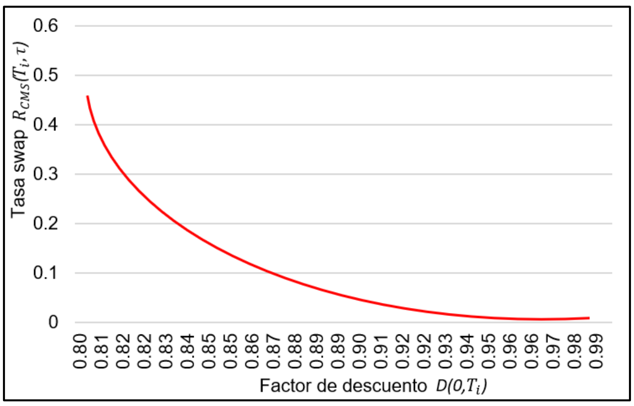
$$CMS_0 = Nocional \sum_{i=1}^{n} \Delta T_i \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[D(0, T_i) \cdot \left(R_{CMS}(T_i, \tau) - R_{fix}\right)\right]$$

donde:

ΔT_i es el factor de devengo correspondiente al periodo $[T_{i-1}, T_i]$
$D(0, T_i)$ es el factor de descuento desde T_i a la fecha actual
$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\cdot]$ denota la expectativa bajo medida de riesgo neutral
$R_{CMS}(T_i, \tau)$ es la tasa *swap* de vencimiento constante fijada en T_i
R_{fix} es la tasa fija pactada en el contrato

Dado que R_{CMS} es una función no lineal de los factores de descuento, su expectativa bajo la medida de riesgo neutral no puede obtenerse de forma directa. Por tanto, es necesario introducir un ajuste de convexidad, el cual corrige esta no linealidad, como se ilustra en la figura 2.

Figura 2. Relación no lineal entre la tasa *swap* $R_{CMS}(T_i, \tau)$ y los factores de descuento $D(0, T_i)$



En resumen, la estructura de pago de un CMS y la relación no lineal entre la tasa swap terminal y los factores de descuento justifican la necesidad de incorporar un ajuste por convexidad en su valuación. Este ajuste será desarrollado en la siguiente sección bajo el marco del modelo *Terminal Swap Rate* (TSR).

METODOLOGÍA DE VALUACIÓN

Dado que $R_{CMS}(T_i, \tau)$ es una función no lineal de los factores de descuento, la expectativa bajo medida neutral al riesgo no coincide con la tasa *forward* observable. Por ello, se define, tal que la tasa CMS corresponde al valor esperado, bajo riesgo neutral, de la tasa *swap* terminal asociada al vencimiento τ:

$$CMS(T_i, \tau) \coloneqq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[R_{CMS}(T_i, \tau)]$$

El modelo *Terminal Swap Rate* (TSR) aproxima la expectativa bajo medida de riesgo neutral de la tasa *swap* terminal mediante una réplica basada en opciones sobre tasas de interés (*swaptions*); permitiendo estimar la tasa CMS ajustada por convexidad a partir de la construcción de una cartera estática de *swaptions* que reproduce el pago del CMS bajo condiciones de no arbitraje. De forma equivalente, esta relación puede representarse analíticamente como:

$$CMS(T_i, \tau) \approx TSR(T_i, \tau) + CONV(T_i, \tau)$$

donde

- $TSR(T_i, \tau)$ es la tasa *swap* terminal calculada con la curva libre de riesgo
- $CONV(T_i, \tau)$ es el ajuste de convexidad que corrige el sesgo por la no linealidad

Con base en esta construcción, cada *swaption* puede descomponerse en *caplets* y *floorlets*, que representan los componentes elementales de la réplica: los *caplets* capturan los escenarios en que la tasa swap terminal se encuentra por arriba del *strike* (*swaptions* pagadores), mientras que los *floorlets* reflejan los casos en que dicha tasa se ubica por debajo del mismo (*swaptions* receptores). Incorporándose de manera implícita el efecto de convexidad y asegurando una valuación consistente con la estructura de volatilidades implícitas y los precios observados en el mercado.

El modelo TSR estima la tasa CMS ajustada mediante la réplica del pago del CMS con una combinación de *caplets* y *floorlets*, construidos sobre una malla discreta de *strikes* K_i y ponderados con coeficientes óptimos ω_i que satisfacen las condiciones de no arbitraje.

El valor de la réplica para un *caplet* se expresa como:

$$D(T, T_p)(R_T - K)_+ = \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i A(T)(R_T - K_i)_+ \qquad S_T \in \{K_i\}_{0 \le i < N}$$

donde:

- $A(T)$: anualidad del *forward starting swap* en T_i, definida como:

  $A(t; T, \tau) = \sum_{j=1}^{n} \Delta T_i D(t, T_j)$ y ΔT_i es el factor de devengo correspondiente al periodo $[T_{i-1}, T_i]$
- $(R_T - K_i)_+$: valor intrínseco del *swaption* pagador con *strike* K_i

De forma análoga, para un *floorlet* se reemplaza $(R_T - K)_+$ por $(K - R_T)_+$, empleando *swaptions* receptores:

$$D(T, T_p)(K - R_T)_+ = \sum_{i=0}^{N-1} \omega_i A(T)(K_i - R_T)_+, \qquad S_T \in \{K_i\}_{0 \le i < N}$$

Metodología de réplica de la tasa CMS

Los pasos para la réplica de la tasa flotante CMS en cada fecha de pago son los siguientes:

1. Definición del rango de *strikes*

Se discretiza el rango de tasas swap terminales entre: $[R_{min}, R_{max}]$, tal que para cada cupón CMS con *fixing* en T y vencimiento de *swap* τ, los límites se obtienen como:

$$R_{min} = F_0 e^{-N^{-1}(\alpha)\sigma_k\sqrt{T}-\frac{1}{2}\sigma_k^2 T}, \qquad R_{max} = F_0 e^{N^{-1}(\alpha)\sigma_k\sqrt{T}-\frac{1}{2}\sigma_k^2 T}$$

donde:

- F_0: tasa *forward* del *swap* $T \times \tau$
- σ_k: volatilidad implícita ATM (*At-the-money*) del *swaption* subyacente
- $N^{-1}(\alpha)$: inverso de la distribución normal estándar para cubrir prácticamente toda la masa de probabilidad ($\alpha \approx 0.999999995$ equivale a 5.73 desviaciones estándar)

El uso de $[R_{min}, R_{max}]$ asegura que la réplica converja al valor esperado bajo el modelo de Black-Scholes.

2. Construcción de la malla logarítmica

Se define el espaciamiento logarítmico constante entre *strikes* consecutivos, con N como el número total de puntos en la malla:

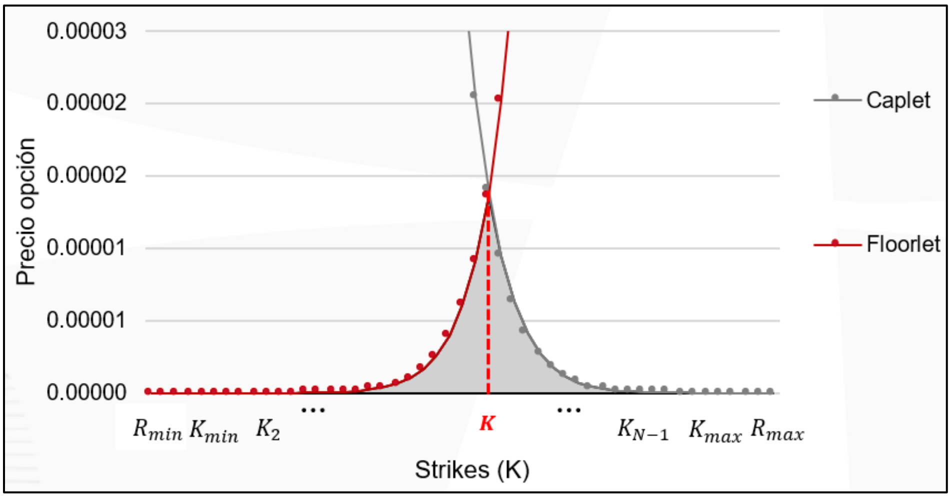
$$\Delta K = \frac{log\, R_{max} - log\, R_{min}}{N}$$

Con este espaciamiento, los *strikes* se determinan mediante:

$$K_i = R_{min} \cdot e^{i \cdot \Delta K}, \qquad i = 1, \dots, N$$

Esta discretización logarítmica concentra mayor densidad de puntos cerca del *strike* ATM mejorando la precisión y estabilidad de la interpolación de los precios de los *swaptions*.

Figura 3. Réplica del valor del CMS mediante opciones (*swaptions*)



3. Determinación del rango efectivo y número de strikes relevantes

Se delimitan los *strikes* relevantes dentro del rango $[R_{\min}, R_{\max}]$, estableciendo los límites $K_{\min}$ y $K_{\max}$ que cubren la región de probabilidad significativa bajo la distribución implícita de tasas terminales. A partir de estos límites, se calcula el número efectivo de puntos de réplica de los *swaptions* en la malla logarítmica mediante las siguientes expresiones:

$$n_{caplet} = \left\lfloor \frac{log\, K_{max} - log\, K}{\Delta K} \right\rfloor + 1, \qquad n_{floorlet} = \left\lfloor \frac{log\, K - log\, K_{min}}{\Delta K} \right\rfloor + 1$$

4. Réplica del payoff mediante swaptions

El valor esperado del pago CMS se obtiene mediante una réplica estática con *swaptions*, construida a partir de combinaciones lineales de *swaptions* pagadores y *swaptions* receptores:

- Para un ***caplet*** con *strike* K, se utiliza un portafolio de *swaptions* pagadores con *strikes* en el rango $[K, K_{\max}]$, replicando el pago cuando la tasa *swap* terminal se ubica dentro de $[K, R_{\max}]$
- Para un ***floorlet***, se emplean *swaptions* receptores con *strikes* en $[K_{\min}, K]$, cubriendo escenarios donde la tasa *swap* terminal se encuentra dentro del rango $[R_{\min}, K]$

5. Asignación de pesos y cálculo del valor replicado

El precio del *swaption* con *strike* K_i recibe un peso ω_i, determinado a partir del modelo lineal de tasa *swap* bajo el enfoque TSR, garantizando el cumplimiento de las condiciones de no arbitraje y paridad *Put–Call.* El valor replicado se calcula como la suma ponderada de los valores presentes de los *swaptions*:

$$P_{Caplet\_rep}(t, K) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i VP_t[Swaption\ Pagador(K_i; T, \tau)]$$

$$P_{Floorlet\_rep}(t, K) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i\, VP_t[Swaption\ Receptor(K_i; T, \tau)]$$

6. Cálculo de la tasa CMS ajustada y convexidad

La tasa CMS ajustada se obtiene aplicando la paridad Put–Call, que relaciona los valores replicados de los swaptions pagadores y receptores:

$$P_{Caplet\_rep}(t, K) - P_{Floorlet\_rep}(t, K) = D(t, T)\left[R_{CMS(t)} - K\right]$$

De esta relación, se despeja la expresión para la tasa CMS ajustada:

$$R_{CMS(t)} = \frac{P_{Caplet\_rep}(t, K) - P_{Floorlet\_rep}(t, K)}{D(t, T)} + K$$

Finalmente, el ajuste por convexidad se define como la diferencia entre la tasa CMS ajustada y la tasa *forward* correspondiente:

$$Ajuste\ por\ convexidad = R_{CMS(t)} - K$$

De esta forma, la tasa CMS ajustada representa la tasa *forward* corregida por el valor implícito de convexidad, garantizando la equivalencia entre el valor teórico del CMS y su réplica de mercado, obteniendo así el cumplimiento del principio *fair value*.

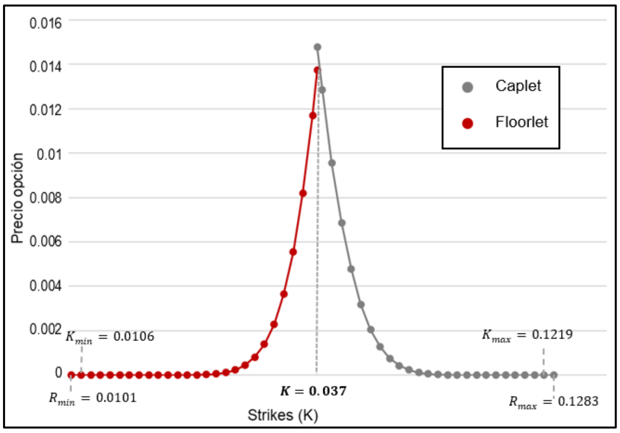
El ajuste por convexidad refleja que la tasa CMS esperada no es igual a la tasa forward, ya que la relación entre tasas y precios no es lineal: cuando las tasas suben, las caídas de precio son menores que los aumentos cuando las tasas bajan. Este efecto de asimetría genera un sesgo positivo en la tasa CMS ajustada.

CASO PRÁCTICO

El objetivo de este caso práctico es ilustrar la valuación de la tasa CMS del último flujo de un instrumento con vencimiento a 2 años y pagos anuales, utilizando el modelo *Terminal Swap Rate* (TSR) descrito previamente. En este ejemplo, la pata flotante paga conforme a la tasa SOFR correspondiente al nodo de 5 años de la curva en cada fecha de fijación, mientras que la contraparte recibe una tasa fija.

La Figura 4 muestra la distribución de *strikes* utilizada en la réplica, la cual concentra mayor densidad de puntos alrededor del *strike at-the-money*, mejorando la precisión en la interpolación de precios de los *swaptions*.

Figura 4. Distribución de la malla de *strikes*



A partir de los precios de los *swaptions* valuados bajo el modelo de Black-Scholes, y de los pesos obtenidos en la malla logarítmica, se determina el valor del *caplet* y *floorlet.* En las tablas 1 y 2 se presentan los resultados de la réplica obtenida para los componentes *floorlet* y *caplet*, respectivamente, los cuales incluyen los *strikes*, pesos y precios de los *swaptions* empleados en la construcción del valor del CMS.

Tabla 1. Composición del *floorlet* en la réplica CMS

FLOORLET (Swaptions receptores)			
Índice (i)	Strike (K_i)	Peso (W_i)	Precio Swaption
Rmin	**0.0101565**	0.0000000	0.0000000
0	0.0106850	-0.0004331	0.0000000
1	0.0112411	-0.0004557	0.0000000
2	0.0118261	-0.0004794	0.0000000
3	0.0124415	-0.0005043	0.0000000
4	0.0130890	-0.0005306	0.0000000
5	0.0137702	-0.0005582	0.0000000
6	0.0144868	-0.0005872	0.0000000
7	0.0152407	-0.0006178	0.0000001
8	0.0160339	-0.0006500	0.0000003
9	0.0168683	-0.0006838	0.0000009
10	0.0177462	-0.0007194	0.0000024
11	0.0186697	-0.0007568	0.0000057
12	0.0196413	-0.0007962	0.0000133
13	0.0206635	-0.0008376	0.0000295
14	0.0217388	-0.0008812	0.0000624
15	0.0228701	-0.0009271	0.0001267
16	0.0240603	-0.0009753	0.0002459
17	0.0253125	-0.0010261	0.0004574
18	0.0266298	-0.0010795	0.0008160
19	0.0280156	-0.0011357	0.0013975
20	0.0294736	-0.0011948	0.0023005
21	0.0310074	-0.0012569	0.0036449
22	0.0326211	-0.0013224	0.0055665
23	0.0343187	-0.0013912	0.0082076
24	0.0361047	-0.0010707	0.0117046
25	**0.0370000**	0.2113906	0.0137253

Tabla 2. Composición del *caplet* en la réplica CMS

CAPLET (Swaptions Pagadores)			
Índice (i)	Strike (K_i)	Peso (W_i)	Precio Swaption
0	**0.0370000**	0.2121409	0.0147751
1	0.0379837	0.0011822	0.0128381
2	0.0399604	0.0016199	0.0095503
3	0.0420400	0.0017042	0.0068708
4	0.0442278	0.0017929	0.0047712
5	0.0465295	0.0018862	0.0031924
6	0.0489510	0.0019843	0.0020548
7	0.0514985	0.0020876	0.0012703
8	0.0541785	0.0021962	0.0007533
9	0.0569980	0.0023105	0.0004280
10	0.0599643	0.0024308	0.0002327
11	0.0630849	0.0025573	0.0001209
12	0.0663680	0.0026903	0.0000600
13	0.0698218	0.0028303	0.0000284
14	0.0734555	0.0029776	0.0000128
15	0.0772782	0.0031326	0.0000055
16	0.0812999	0.0032956	0.0000023
17	0.0855308	0.0034671	0.0000009
18	0.0899820	0.0036476	0.0000003
19	0.0946648	0.0038374	0.0000001
20	0.0995913	0.0040371	0.0000000
21	0.1047742	0.0042472	0.0000000
22	0.1102268	0.0044682	0.0000000
23	0.1159631	0.0047008	0.0000000
24	0.1219980	0.0049454	0.0000000
Rmax	**0.1283470**	0.0000000	0.0000000

Bajo la paridad *Put–Call*, la diferencia entre el valor replicado del *caplet* y el *floorlet* determina el valor presente del pago neto del CMS, despejando, se obtiene la tasa CMS ajustada:

$$R_{CMS(t)} = \frac{P_{Caplet\_rep}(t,K) - P_{Floorlet\_rep}(t,K)}{D(t,T)} + K \; = \frac{0.003202 - 0.002859}{0.96368} + 0.037 = 0.037355$$

El resultado refleja que la tasa CMS ajustada incorpora un ajuste positivo por convexidad, el cual compensa la diferencia entre la tasa *forward* observable y el valor esperado de la tasa *swap* terminal bajo la medida de riesgo neutral.

Finalmente, el ajuste por convexidad se define como la diferencia entre la tasa CMS ajustada y la tasa *forward* correspondiente:

$$Ajuste\ por\ convexidad = R_{CMS(t)} - K \; = \; 0.037355 - 0.037 = 0.000355$$

De esta forma, la tasa CMS ajustada representa una tasa *forward* corregida por la convexidad del instrumento, garantizando una valuación coherente con las condiciones de mercado y la estructura de volatilidades observadas.

La correcta aplicación del ajuste de convexidad en instrumentos CMS permite al banco garantizar valuaciones consistentes con el mercado, mejorar la cobertura del riesgo de pendiente y fortalecer la gestión del riesgo estructural de tasas. En entornos de mayor volatilidad, este ajuste se vuelve especialmente crítico para mantener coherencia en la valuación y gestión del IRRBB (*Interest Rate Risk in the Banking Book*).

¿PARA QUÉ SIRVEN EN LA GESTION DEL BALANCE DE UN BANCO?

Los CMS son especialmente útiles en la gestión de balance, riesgos estructurales, IRRBB y ALM ya que permiten:

1. Cambiar la sensibilidad del balance a movimientos en la curva de tasas

Los bancos tienen naturalmente activos de largo plazo (crédito hipotecario, corporativo, inversiones) y pasivos de corto plazo (depósitos a la vista, fondeo interbancario). Esto genera exposición al riesgo de tasa de interés y al riesgo de pendiente de la curva.

Un CMS permite gestionar el riesgo de pendiente si el banco espera que las tasas de largo plazo suban, puede recibir la tasa CMS (o pagar fijo), protegiendo el valor económico del portafolio. Si anticipa empinamiento o aplanamiento de la curva, puede ajustar sus coberturas para alinearse con su visión.

2. Ajustar el perfil sintético de duración de activos y pasivos

Los CMS permiten extender o acortar la duración económica sin mover los instrumentos del balance. Por ejemplo, un banco con exceso de activos de largo plazo y pasivos de corto plazo puede usar un CMS para acortar la duración de forma sintética, por otro lado, un banco puede beneficiarse de la bajada de tasas de largo plazo pactando un CMS para prolongar la duración sin tener que comprar bonos directamente.

3. Administrar el riesgo de convexidad y la sensibilidad a cambios no paralelos

El IRRBB requiere gestionar movimientos no paralelos en la curva, cambios de curvatura y efectos de convexidad.
En este contexto, los instrumentos CMS se emplean para ejecutar estrategias de curva que aprovechen diferencias en pendientes y nodos, protegerse contra reversiones en la forma de la curva y controlar la gamma de tasas largas, reduciendo así la exposición a convexidad.

4. Cobertura de productos con perfil no lineal o con embebidos

Los CMS son útiles cuando el banco tiene en su balance productos como hipotecas con prepago, bonos *callable/putable,* opciones implícitas y pasivos a tasa revisable de largo plazo, por mencionar algunos.

SUPUESTOS TÉCNICOS

- Se asume la existencia, sin arbitraje de una medida de riesgo neutral para la valuación de instrumentos derivados
- Los mercados son líquidos y permiten la construcción de curvas de descuento y la estimación de forwards consistentes con los precios observados
- La tasa CMS se expresa como el valor esperado bajo riesgo neutral de la tasa swap terminal
- El modelo *Terminal Swap Rate* (TSR) supone una dinámica log-normal para la tasa swap terminal
- Las volatilidades implícitas utilizadas son consistentes con la sábana de volatilidad de *swaptions* disponible en mercado

RIESGOS Y LIMITANTES

- **Dependencia de la liquidez de swaptions.** La precisión del ajuste por convexidad depende de la disponibilidad y calidad de cotizaciones de volatilidad implícita; en entornos ilíquidos, el modelo puede perder robustez
- **Sensibilidad a la curva y al modelo TSR.** La tasa CMS replica movimientos de las tasas forward y de la tasa swap terminal; sesgos en la construcción de curvas o en la calibración del TSR afectan directamente la valuación
- **Limitaciones ante movimientos no lineales**. En escenarios de choques abruptos de tasas o sondeos de volatilidad, la réplica puede presentar errores de seguimiento o sobreestimar/ subestimar la convexidad
- **Supuesto de estructura estable de volatilidades**. El modelo presupone que la sábana de volatilidad refleja correctamente la dinámica futura; cambios estructurales pueden comprometer su validez

NOTAS Y REFERENCIAS

1. Andersen L. and Piterbarg V. (2010) Interest rate modeling Volume III: Products and Risk Management. Atlantic Financial Press

2. Hagan, P. (2003). Convexity Conudrums: Pricing CMS Swaps, Caps, and Floors. Wilmott

3. Murex (2025). Documentación técnica sobre modelos de tasas de interés.